DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

1987

MATHEMATIQUES

DUREE : 4 Heures.

1ère épreuve commune aux 3 options M, P et TA.

*Prévoir une feuille de papier millimétré.*

Nota : Il est demandé au candidat de laisser à gauche
------ de la page une marge de 4 centimètres.

*Note très importante : Toute copie illisible ou mal présentée sera pénalisée. Les résultats demandés seront soigneusement encadrés et mis en évidence, et les démonstrations seront étayées par des références précises à des théorèmes du cours.*

*Les parties I, II et III peuvent être traitées indépendamment.*

## P R E M I E R E  P A R T I E :

1/ - On considère la fonction g de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ pour } x \neq 0 \quad , \quad \text{et} \quad g(0) = 1$$

Démontrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ .

2/ - Démontrer que g est solution d'une équation différentielle linéaire (E), du second ordre, que l'on déterminera.

3/ - Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $]0, \pi[$

4/ - En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^*$ et donner les fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathbb{R}^*$ est solution de (E).

5/ - Résoudre l'équation différentielle $y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$

sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$

## D E U X I E M E  P A R T I E

On considère la fonction $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt$

1/ a) - Quel est son ensemble de définition ?
b) - Etudier la parité de f.

2/ Montrer que f est développable en série entière, déterminer ce développement en série entière et en donner le rayon de convergence.

3/ a) - Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$ .

b) - Donner un encadrement des deux premiers extrêma relatifs de f permettant de calculer avec 2 chiffres significatifs exacts les valeurs numériques de ces extrêma ( On justifiera soigneusement la méthode utilisée ).

4/ Démontrer que f admet une limite finie $\ell$ lorsque $x \to +\infty$ .

5/ On admet provisoirement que $\ell = \frac{\pi}{2}$ ( ce résultat sera démontré dans la troisième partie ). Donner l'allure de la représentation graphique de f dans un repère orthogonal
( unité en abscisse : 1 cm ; en ordonnée : 5 cm )

## T R O I S I E M E  P A R T I E

Dans cette partie, on se propose de calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \, dt$$

1/- On considère les fonctions :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} \, dt \quad \text{et} \quad \psi(x) = \int_0^{+\infty} \sin t \, . \, e^{-xt} \, dt$$

Montrer que $\psi(x)$ existe pour tout $x \in ]0, +\infty[$

TOURNER LA PAGE

2/- a) Démontrer que, $\forall t \in ]0, +\infty[$, $\left|\frac{\sin t}{t}\right| \leqslant 1$.

b) Montrer que $\varphi(x)$ existe pour tout $x \in [0, +\infty[$, et que
$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$

3/- Soit $a > 0$, fixé. On considère les suites de fonctions :

$$\psi_n(x) = \int_0^n \sin t \cdot e^{-xt}\, dt \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = \int_0^n \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt.$$

Démontrer que $\psi_n$ converge uniformément vers $\psi$ sur $[a, +\infty[$.

En déduire que $\varphi$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = -\psi(x).$$

4/- Calculer $\psi(x)$ pour $x > 0$, par la méthode de votre choix.
En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ pour tout $x > 0$.

5/- $x \geqslant 0$ étant fixé, prouver que la série de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt \quad \text{est une série alternée.}$$

En déduire : $\forall x \in [0, +\infty[$,

$$\left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt\right| \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

6/- a) Démontrer que $\varphi$ est continue sur $[0, +\infty[$.

En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$

b) $\varphi$ est-elle dérivable sur $[0, +\infty[$ ? Pourquoi ?

7/- Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{t^2}\, dt$ converge, puis la calculer.